

El tamaño del Infinito

VI Escuela de Invierno Ingemat

Profesor Héctor Olivero Q.

"Existe una opinión generalizada según la cual la matemática es la ciencia más difícil cuando en realidad es la más simple de todas. La causa de esta paradoja reside en el hecho de que, precisamente por su simplicidad, los razonamientos matemáticos equivocados quedan a la vista. En una compleja cuestión de política o arte, hay tantos factores en juego y tantos desconocidos e inaparentes, que es muy difícil distinguir lo verdadero de lo falso. El resultado es que cualquier tonto se cree en condiciones de discutir sobre política y arte -y en verdad lo hace- mientras que mira la matemática desde una respetuosa distancia."

Ernesto Sabato

Introducción

El hotel infinito del Sr. Hilbert El hotel más lujoso del mundo es un hotel para números naturales.

Cuentan que cuando se construyó, cada número natural $1, 2, 3, \dots$ tenía su propia habitación. Sin embargo, se habían olvidado de 0.

¿Será posible darle a 0 su propia habitación?

En este mini-curso queremos responder a la pregunta anterior y a otras que se le relacionan, pero introduciendo a la vez, a las y los estudiantes, al paradigma de la demostración matemática como instrumento constructor de conocimiento. Pero para ello, debemos introducir primero algunos elementos de Lógica matemática.

Lógica

Definición 1 (Proposición Lógica). Por **proposición lógica** entenderemos cualquier afirmación susceptible a ser verdadera o falsa.

Ejemplo 1. Son proposiciones:

1. "Llueve en Valparaíso".
2. "Hoy es lunes".
3. "La lógica matemática es muy difícil".

Observación 1. Las proposiciones lógicas las denotaremos por letras minúsculas: p, q, r , etc.

Definición 2 (Proposiciones equivalentes). Dadas dos proposiciones p y q diremos que son equivalentes, si y sólo si, tienen el mismo valor de verdad. Es decir, ambas son simultáneamente verdaderas o simultáneamente falsas.

Al decir que p es equivalente a q se da origen a una nueva proposición, la que denotaremos $p \Leftrightarrow q$, cuyo valor de verdad se puede resumir en la siguiente tabla:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Además de poder comparar dos proposiciones, es decir, poder decidir si son equivalentes o no, nos interesa a partir de ciertas proposiciones dadas, construir otras nuevas. Para ello utilizaremos los conectores lógicos.

Definición 3 (Negación). Dada una proposición p , su negación, la que denotaremos $\bar{p}$, es la proposición que tiene siempre el valor de verdad contrario al que tiene p . Lo anterior se puede resumir en la siguiente tabla:

p	$\bar{p}$
V	F
F	V

Definición 4 (Conjunción). Dadas dos proposiciones p y q su conjunción, que denotaremos como $p \wedge q$, será verdadera si y sólo si ambas son proposiciones, p y q , son verdaderas simultáneamente. Lo anterior se puede resumir en la siguiente tabla:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Definición 5 (Disyunción). Dadas dos proposiciones p y q su disyunción, que denotaremos como $p \vee q$, será verdadera si al menos una de las proposiciones, p o q , es verdadera. Lo anterior se puede resumir en la siguiente tabla:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Definición 6 (Implicancia). Dadas dos proposiciones p y q diremos que p implica a q , lo que denotaremos como $p \Rightarrow q$, si cada vez que p es verdadera, entonces q también lo es. Lo anterior se puede resumir en la siguiente tabla:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplo II. Consideremos las proposiciones: p : “Llueve” y q : “Las calles están mojadas”. Es obvio que $p \Rightarrow q$, pues cada vez que llueve las calles se mojan. Sin embargo, las calles podrían mojarse porque se rompió una tubería o porque alguien abrió un grifo. Esto nos muestra que cuando se afirma que p implica q todo lo que se está diciendo es que cada vez que p es cierta, q también lo será, sin decir nada de lo que ocurre cuando p es falsa.

Proposición 7. Sean p, q, r proposiciones lógicas. Entonces:

1. $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$.
 $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$.
2. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.
 $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

-
3. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r).$
 $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q).$

Demostración:

Para terminar esta sección probaremos el siguiente resultado, como un ejemplo del uso de lógica en demostraciones matemáticas.

Proposición 8. $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Demostración:



Conjuntos

Definición 9 (Conjunto). Por **conjunto** entenderemos a una colección de objetos, previamente definidos y diferenciados entre sí, a los que llamaremos **elementos**.

Ejemplo III. Son conjuntos: $\{a, b, c\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{\text{Todos los planetas del sistema solar}\}$.

Observación II. Los conjuntos los denotaremos por letras mayúsculas: A, B, C , etc. Mientras que los elementos los denotaremos por letras minúsculas: a, b, c , etc.

Un conjunto se puede describir por extensión, es decir listando todos sus elementos: $\{a, b, c\}$. O por comprensión, es decir enunciando una propiedad que caracteriza a cada uno de sus elementos: $\{\text{Todos los planetas del sistema solar}\}$.

Ejemplo IV. Los siguientes corresponden a ejemplos de conjuntos numéricos:

1. El conjunto de los números naturales $\{0, 1, 2, \dots\}$, que denotaremos $\mathbb{N}$.
2. El conjunto de los números enteros $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, que denotaremos $\mathbb{Z}$.
3. El conjunto de los números racionales $\{p/q : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ que denotaremos $\mathbb{Q}$.
4. El conjunto de los números reales, que denotaremos $\mathbb{R}$.

Definición 10 (Igualdad de Conjuntos). Dados dos conjuntos A y B diremos que son iguales si contienen los mismos elementos. Es decir:

$$A = B \Leftrightarrow ((\forall x \in A)x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge ((\forall x \in B)x \in B \Rightarrow x \in A).$$

Ejemplo V. El conjunto $\mathbb{N}$ y el conjunto $\{z \in \mathbb{Z} : z \geq 0\}$ son iguales.

Definición 11 (Conjunto Vacío). El conjunto vacío, que denotamos $\emptyset$, corresponde al conjunto que no contiene ningún elemento.

Definición 12 (Inclusión). Dados dos conjuntos A y B , diremos que A está incluido en B , lo que denotamos por $A \subset B$ todos los elementos de A , están también en B . Es decir:

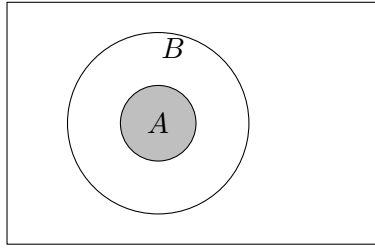


Figura 1: Diagrama de Venn para la inclusión: $A \subset B$.

$$A \subset B \Leftrightarrow ((\forall x \in A)x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Ejemplo VI. Se tiene la siguiente cadena de inclusiones: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Proposición 13. Sean A, B, C conjuntos. Entonces:

1. $(A = B \wedge B = C) \Rightarrow A = C$.
2. $A \subset A$.
3. $\emptyset \subset A$.
4. $(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C$.
5. $(A \subset B \wedge B \subset A) \Rightarrow A = B$.

Demostración:



Definición 14 (Las partes de un conjunto). Dados un conjuntos A , llamaremos **conjunto de las partes de A** , o simplemente **las partes de A** , al conjunto que reúne a todos los subconjuntos de A . Se puede denotar por $\mathcal{P}_A$ o por 2^A .

Ejemplo VII. Sea $A = \{a, b, c\}$, $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Operaciones con Conjuntos

Definición 15 (Unión). *Dados dos conjuntos A y B , la unión de ellos, denotada como $A \cup B$, consiste en el conjunto que contiene todos los elementos que están al menos en uno de los dos conjuntos. Es decir:*

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

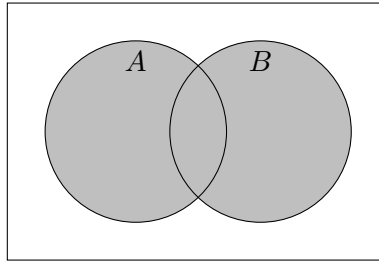


Figura 2: Diagrama de Venn para la unión de dos conjuntos.

Ejemplo VIII. $\{a, b, c\} \cup \{e, d, f\} = \{a, b, c, e, d, f\}$.

Definición 16 (Intersección). *Dados dos conjuntos A y B , la intersección de ellos, denotada como $A \cap B$, consiste en el conjunto que contiene todos los elementos que están simultáneamente en ambos conjuntos. Es decir:*

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

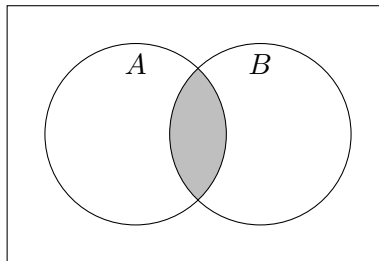


Figura 3: Diagrama de Venn para la intersección de dos conjuntos.

Ejemplo IX. $\{a, b, c\} \cap \{e, d, f\} = \emptyset$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$, $\{a, b, c\} \cap \{a, e, g, f\} = \{a\}$.

Proposición 17. Sean A, B, C conjuntos. Entonces:

1. $A \cap B = B \cap A$.
 $A \cup B = B \cup A$.
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$
 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

4. $A \cap B \subset A \subset A \cup B.$

Demostración:

Ejercicio I. Sea A un conjunto incluido en un universo U . Demuestre que:

1. $A \cup A = A.$

3. $A \cup \emptyset = A.$

5. $A \cup U = U.$

2. $A \cap A = A.$

4. $A \cap \emptyset = \emptyset.$

6. $A \cap U = A.$

Solución:

Ejercicio II. Sean A, B, C conjuntos. Demuestre que:

1. $A \subset C, B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$.
2. $A \subset B, A \subset C \Rightarrow A \subset B \cap C$.

Solución:



Definición 18 (Diferencia). Dados dos conjuntos A y B , la diferencia de A menos B , denotada como $A \setminus B$, consiste en el conjunto que contiene todos los elementos que están en A , pero no están en B . Es decir:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

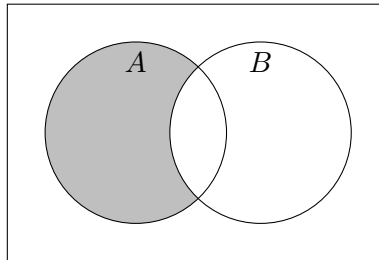


Figura 4: Diagrama de Venn para la diferencia de dos conjuntos.

Ejemplo X. $\{a, b, c\} \setminus \{e, d, f\} = \{a, b, c\}$, $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \{\dots, -2, -1\}$, $\{a, b, c\} \setminus \{a, e, g, f\} = \{b, c\}$.

En muchas ocasiones, todos los conjuntos con los que se desea trabajar son subconjuntos de un conjunto más grande al que se le suele llamar universo. En tal caso, se puede introducir la noción de complemento de un conjunto.

Definición 19 (Complemento). Dado un conjunto universo U y un conjunto $A \subset U$, el complemento de A , denotado como A^c , consiste en el conjunto que contiene todos los elementos que están en U , pero no están en A . Es decir:

$$A^c = U \setminus A.$$

En el caso de que el conjunto universo se infiere del contexto, se suele escribir $A^c = \{x \notin A\}$.

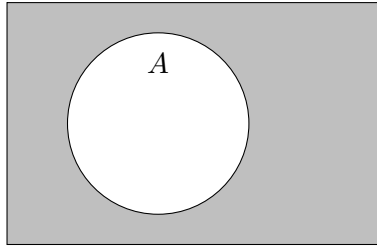


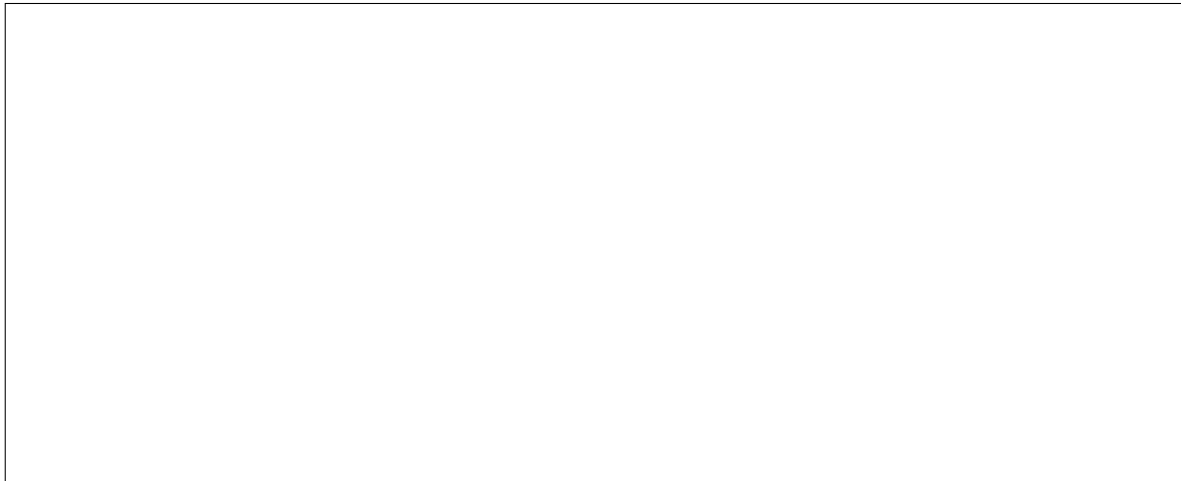
Figura 5: Diagrama de Venn para el complemento de un conjunto.

Ejemplo XI. Si consideramos como universo el alfabeto latino, $\{\text{consonantes}\}^c = \{a, e, i, o, u\}$.

Proposición 20. Sean A, B conjuntos. Entonces:

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
2. $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$.
3. $(A^c)^c = A$
4. $A \cup A^c = U$.
 $A \cap A^c = \emptyset$.

Demostración:



Definición 21 (Diferencia Simétrica). *Dados dos conjuntos A y B , la diferencia simétrica entre A y B , denotada como $A \triangle B$, consiste en el conjunto que contiene todos los elementos que: están en A , pero no están en B , o bien, están en B , pero no están en A . Es decir:*

$$A \triangle B = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}.$$

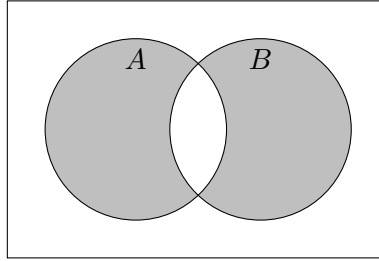


Figura 6: Diagrama de Venn para la diferencia simétrica de dos conjuntos.

Ejemplo XII. $\mathbb{Z} \triangle \mathbb{N} = \{\dots, -2, -1\}$, $\{a, b, c\} \triangle \{a, e, g, f\} = \{b, c, e, g, f\}$.

Definición 22 (Producto Cruz). *Dados dos conjuntos A y B , el producto cruz entre ellos, denotado como $A \times B$, consiste en el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) que se pueden construir considerando $a \in A$ y $b \in B$. Es decir*

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, x \in B\}.$$

Ejemplo XIII. $\{0, 1\} \times \{a, b, c\} = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)\}$.

0.0.1. Operaciones con una cantidad arbitraria de conjuntos

Si bien las operaciones de conjuntos se definen de forma binaria, la unión y la intersección se pueden definir para una cantidad cualquiera, incluso infinita, de conjuntos. En efecto, sea I un conjunto cualquiera, tal que para todo $i \in I$, A_i es un conjunto. Se define entonces:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{a : (\exists i \in I) a \in A_i\},$$

mientras que

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{a : (\forall i \in I) a \in A_i\}.$$

Por otro lado, el producto cruz se puede definir entre una cantidad finita de conjuntos $A_1, \dots, A_n$, como el conjunto de todas las listas ordenadas de tamaño n tales que el i -ésimo elemento pertenece a A_i . Es decir:

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Formalmente, $A_1 \times \dots \times A_n$ se puede definir inductivamente para $n \geq 2$ como

$$A_1 \times \dots \times A_n = (A_1 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n.$$

Funciones

Definición 23 (Función). Sean A, B conjuntos, una función $f : A \rightarrow B$, corresponde a un subconjunto de $A \times B$ que satisface:

$$(\forall a \in A) (\exists b \in B) (a, b) \in f.$$

$$((a, b) \in f \wedge (a, c) \in f) \Rightarrow b = c.$$

En palabras, a cada elemento de A , f asocia a lo más un elemento de B .

Ejemplo XIV. $f = \{(0, a), (1, b)\}$ es una función desde $\{0, 1\}$ a $\{a, b, c\}$, mientras que $g = \{(0, a), (0, c), (1, b)\}$ no lo es.

Las funciones entre conjuntos finitos se pueden presentar en una tabla o gráficamente. En la Tabla 1 vemos la representación en Tabla de f y g , mientras que en la Figura 7 aparece la representación gráfica de las mismas.

x	$f(x)$
0	a
1	b

x	$g(x)$
0	a
0	c
1	b

Tabla 1: Representación en forma de tabla para los subconjuntos de $\{0, 1\} \times \{a, b, c\}$ del Ejemplo XIV. A la izquierda f que es una función y a la derecha g que no lo es.

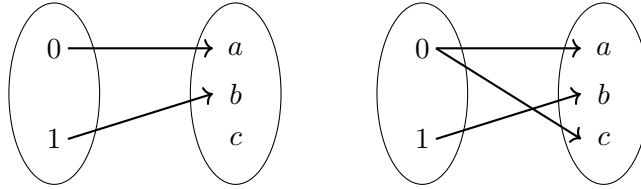
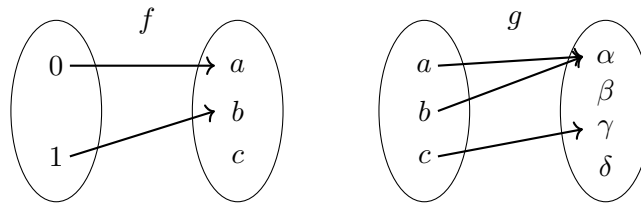


Figura 7: Representación gráfica para los subconjuntos de $\{0, 1\} \times \{a, b, c\}$ del Ejemplo XIV. A la izquierda f que es una función y a la derecha g que no lo es.

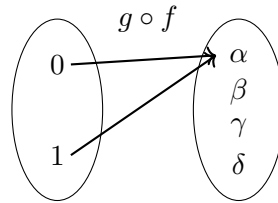
Definición 24 (Composición de funciones). Sean A, B, C conjuntos, una función $f : A \rightarrow B$ y una función $g : B \rightarrow C$. Se define la **composición** de f y g , denotada por $g \circ f$, como

$$\begin{aligned} g \circ f & : A \rightarrow C \\ (g \circ f)(a) & = g(f(a)). \end{aligned}$$

Para ver gráficamente la composición de dos funciones, consideremos f y g definidas en los siguientes diagramas:



La composición de f y g la encontramos en el siguiente diagrama:



Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad

Definición 25 (Función Inyectiva). Sean A, B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Se dice que f es **inyectiva**, si

$$(\forall a, a' \in A) \quad f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'.$$

En palabras, a elementos distintos de A , f asocia elementos distintos de B .

Definición 26 (Función Sobreyectiva). Sean A, B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Se dice que f es **sobreyectiva**, si

$$(\forall b \in B) \quad (\exists a \in A) \quad f(a) = b.$$

En palabras, cada elemento de B está asociados al menos a un elemento de A .

Definición 27 (Función Biyectiva). Sean A, B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Se dice que f es **biyectiva**, si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Definición 28 (Función Inversa). Sean A, B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Si f es biyectiva, se define la función inversa de f , denotada por f^{-1} , por:

$$\begin{aligned} f^{-1} &: B \rightarrow A \\ f^{-1}(b) = a &\Leftrightarrow f(a) = b. \end{aligned}$$

Ejemplo XV. Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$. Considere las funciones $f : A \rightarrow B$ y $g : A \rightarrow B$ que aparecen en las siguientes tablas:

x	$f(x)$	x	$g(x)$
a	α	a	α
b	β	b	β
c	γ	c	γ
d	δ	d	δ
e	α	e	ϵ

La función f no es inyectiva porque $f(a) = f(e)$, y no es sobreyectiva porque ϵ no es asociado a ningún elemento de A . Por otro lado, la función g es biyectiva y por lo tanto podemos definir su inversa:

y	$g^{-1}(y)$
α	a
β	b
γ	c
δ	d
ϵ	e

Ejercicio III. Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, dada por $f(n) = 2n$. Muestre que f es inyectiva, pero no es sobreyectiva.

Ejercicio IV. Sea $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, dada por

$$f(z) = \begin{cases} 2z & z \geq 0 \\ 2|z| + 1 & z < 0. \end{cases}$$

Muestre que f es biyectiva.

Ejercicio V. Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, dada por

$$f(n, m) = n + m.$$

Muestre que f es sobreyectiva pero no inyectiva.

Proposición 29. Sean A, B y C conjuntos y $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ funciones. Entonces:

1. Si f y g son inyectivas, entonces $(g \circ f)$ es inyectiva.
2. Si f y g son sobreyectivas, entonces $(g \circ f)$ es sobreyectiva.
3. Si f y g son biyectivas, entonces $(g \circ f)$ es biyectiva.
4. Si $(g \circ f)$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.
5. Si $(g \circ f)$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

Demostración:

Imagen y Preimagen de un Conjunto

Definición 30 (Imagen de un conjunto). Sean A, B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Si $A' \subset A$, se define la imagen de A' a través de f por

$$f(A') := \{f(a) : a \in A'\}.$$

Notese que

$$b \in f(A') \Leftrightarrow (\exists a \in A') f(a) = b.$$

Definición 31 (Preimagen de un conjunto). Sean A, B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Si $B' \subset B$, se define la preimagen de B' a través de f por

$$f^{-1}(B') := \{a \in A : f(a) \in B'\}.$$

Notese que

$$a \in f^{-1}(B') \Leftrightarrow f(a) \in B'.$$

Ejemplo XVI. Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$. Considere la función $f : A \rightarrow B$ dada por:

x	$f(x)$
a	α
b	β
c	γ
d	δ
e	α

Entonces: $f(\{a, b, c\}) = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $f(\{a, e\}) = \{\alpha\}$, $f^{-1}(\{\alpha, \beta\}) = \{a, b, e\}$ y $f^{-1}(\{\delta\}) = \{d\}$.

Ejercicio VI. Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, dada por

$$f(n, m) = n \cdot m.$$

Encuentre $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{10\})$, $f(\{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n = m\})$.

Proposición 32. Sean A, B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Entonces:

1. Si A_1, A_2 son subconjuntos de A y $A_1 \subset A_2$, entonces:

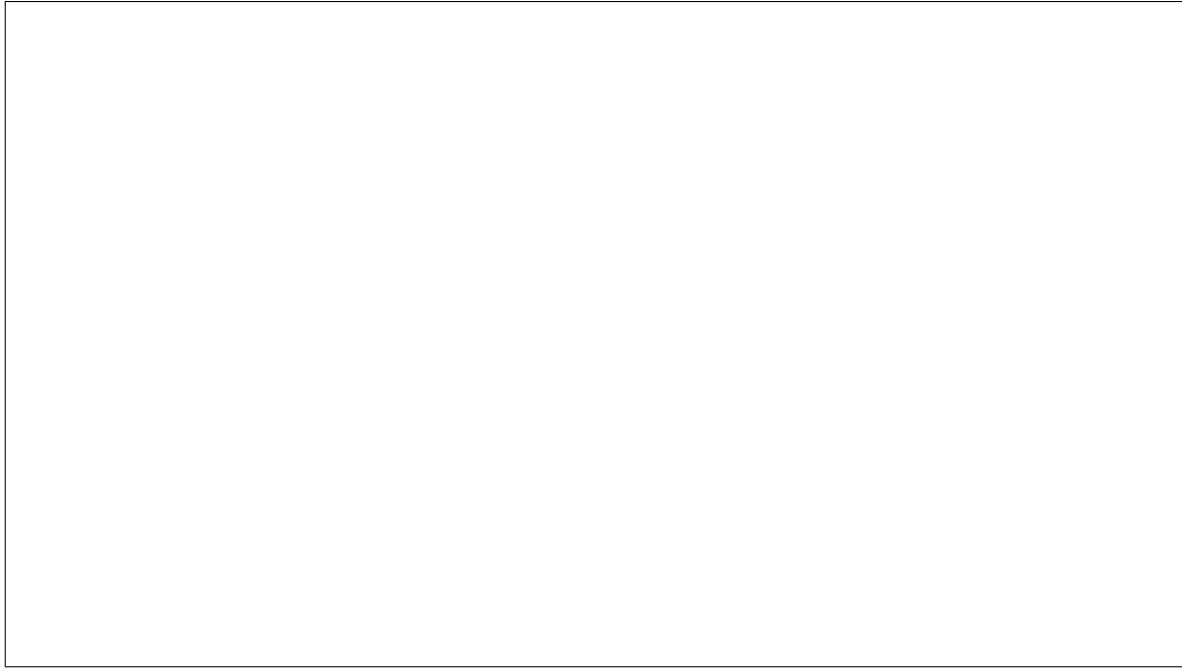
$$f(A_1) \subset f(A_2).$$

2. Si $A_1, \dots, A_n$ son subconjuntos de A , entonces:

$$f\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \bigcup_{i=1}^n f(A_i).$$

$$f\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \subset \bigcap_{i=1}^n f(A_i).$$

Demostración:



Proposición 33. Sean A, B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Entonces:

1. Si B_1, B_2 son subconjuntos de B y $B_1 \subset B_2$, entonces:

$$f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2).$$

2. Si $B_1, \dots, B_n$ son subconjuntos de B , entonces:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(B_i).$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n B_i\right) = \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(B_i).$$

Demostración:



Cardinal de un conjunto



Figura 8: Contando ovejas con piedras: Se cuenta que cuando los primeros pastores sacaban a pastar sus ovejas, por cada oveja que salía del corral ponían una piedra en una bolsa, al guardar las ovejas, cada vez que una entraba al corral sacaban una piedra de su bolsa. Si cuando entraba la última oveja la bolsa estaba vacía, eso significaba que todas las ovejas habían regresado.

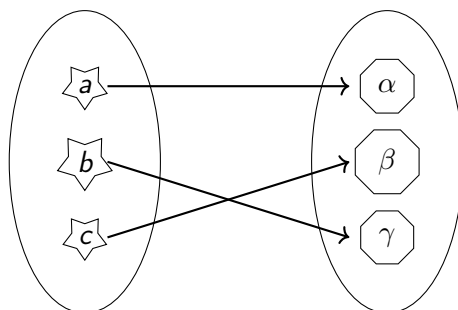
Para definir una noción de tamaño que pueda utilizarse con conjuntos infinitos, lo que haremos

será definir el cardinal de un conjunto comparándolo con otro:

Definición 34 (Cardinal de un conjunto). *Dados dos conjuntos A y B , diremos que:*

1. *El cardinal A y B son iguales, lo que denotaremos como $|A| = |B|$, si existe una función biyectiva $f : A \rightarrow B$.*
2. *El cardinal de A es menor o igual que el cardinal de B , lo que denotaremos como $|A| \leq |B|$, si existe una función inyectiva $f : A \rightarrow B$.*
3. *El cardinal de A es menor estricto que el cardinal de B , lo que denotaremos como $|A| < |B|$, si $|A| \leq |B|$ pero $|A| \neq |B|$.*

Ejemplo XVII. *Los conjuntos que aparecen a continuación tienen el mismo cardinal, pues se puede construir una biyección entre ellos:*



Ejemplo XVIII. *Si $a, b \in \mathbb{R}$, y $a < b$, entonces $[a, b]$ tiene el mismo cardinal que $[0, 1]$. En efecto, sea la función $f : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ dada por*

$$f(x) = \frac{x - a}{b - a}.$$

Veamos que f es biyectiva.

Inyectividad: *Si $f(x) = f(y)$, entonces $\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-a}{b-a}$, de donde se puede despejar $x = y$, que es lo que se quería probar.*

Sobreyectividad: *Sea $y \in [0, 1]$, entonces $a + (b - a)y \in [a, b]$ y además $f(a + (b - a)y) = y$, por lo tanto f es sobreyectiva.*

En conclusión, existe una biyección entre $[a, b]$ y $[0, 1]$, y por lo tanto ambos conjuntos tienen el mismo cardinal.

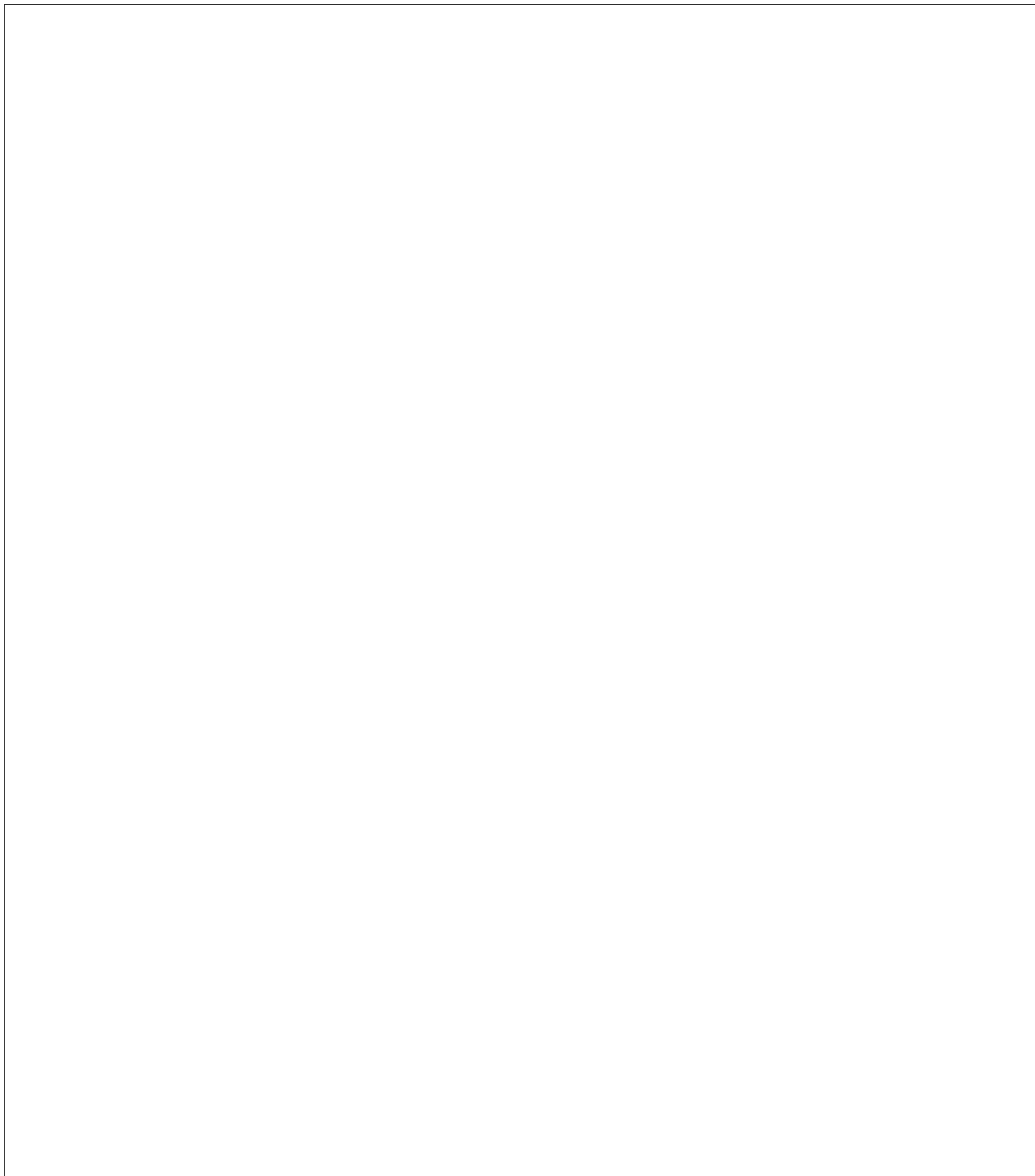
Definición 35 (Conjunto Finito). *Diremos que un conjunto A es finito si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $|A| = |\{1, 2, \dots, n\}|$.*

Proposición 36 (Propiedades del Cardinal de un Conjunto). *Sean A, B, C conjuntos. Entonces:*

1. $|A| \leq |A|$.
2. Si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |C|$, entonces $|A| \leq |C|$.
3. Si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$, entonces $|A| = |B|$. (Teorema de Bernstein - Cantor - Schröder)
4. Si $A \subset B$, entonces $|A| \leq |B|$.

5. $|A| < |2^A|$ (*Teorema de Cantor*).

Demostración:



Conjuntos numerables

Definición 37 (Conjunto Numerable). *Diremos que un conjunto es numerable si tiene el mismo cardinal que $\mathbb{N}$.*

Proposición 38. $\mathbb{Z}$ es numerable.

Demostración:

Proposición 39. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

Demostración:

Corolario 40. $\mathbb{Q}$ es numerable.

Demostración:

Corolario 41. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, si $A_1, \dots, A_n$ son conjuntos numerables, entonces $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ es numerable.*

Demostración:

Proposición 42. *Si para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n es un conjunto numerable, entonces*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

es numerable.

Demostración:

Conjuntos no numerables

Proposición 43. $2^{\mathbb{N}}$ es no numerable.

Demostración:

Proposición 44. $[0, 1]$ es no numerable.

Demostración:

Corolario 45. $\mathbb{R}$ es no numerable.

Demostración:

La hipótesis del continuo

Hasta aquí hemos aprendido que $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$. Una pregunta natural que surge a partir de esto es si existe un conjunto infinito cuyo cardinal sea estrictamente mayor al cardinal de los números naturales, pero estrictamente menor que el cardinal de los números reales. Esta inocente pregunta se puede reformular de la siguiente manera, que se conoce como “la hipótesis del continuo”:

“No existe un conjunto con un cardinal estrictamente mayor que el de los números naturales y estrictamente menor que el de los números reales”

Probar la veracidad o falsedad de la hipótesis del continuo fue el primero de los célebres 23 problemas que propuso David Hilbert en la segunda versión del Congreso Internacional de Matemáticos que se desarrolló en París en el año 1900. Sin embargo, la respuesta al problema planteado por Hilbert no llegó hasta el año 1940 de la mano de Kurt Gödel, y luego complementada por el trabajo de Paul Cohen en 1963.

Lo que se concluye de los trabajos de Gödel y Cohen es que la hipótesis del continuo es independiente a la teoría “estándar” de conjuntos, entonces tanto ella como su negación, pueden ser agregadas como un axioma sin perder consistencia en la teoría. Dicho en términos más elementales, no es posible probar ni la veracidad ni la falsedad de la hipótesis del continuo, y por lo tanto en algún sentido el problema planteado por Hilbert sigue abierto.

Resumen del Curso

Lógica

Definición 1 (Proposición Lógica). Por **proposición lógica** entenderemos cualquier afirmación susceptible a ser verdadera o falsa.

Definición 2 (Proposiciones equivalentes). Dadas dos proposiciones p y q diremos que son equivalentes, si y sólo si, tienen el mismo valor de verdad. Es decir, ambas son simultáneamente verdaderas o simultáneamente falsas.

Al decir que p es equivalente a q se da origen a una nueva proposición, la que denotaremos $p \Leftrightarrow q$, cuyo valor de verdad se puede resumir en la siguiente tabla:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Definición 3 (Negación). Dada una proposición p , su negación, la que denotaremos $\bar{p}$, es la proposición que tiene siempre el valor de verdad contrario al que tiene p . Lo anterior se puede resumir en la siguiente tabla:

p	$\bar{p}$
V	F
F	V

Definición 4 (Conjunción). Dadas dos proposiciones p y q su conjunción, que denotaremos como $p \wedge q$, será verdadera si y sólo si ambas son proposiciones, p y q , son verdaderas simultáneamente. Lo anterior se puede resumir en la siguiente tabla:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Definición 5 (Disyunción). Dadas dos proposiciones p y q su disyunción, que denotaremos como $p \vee q$, será verdadera si al menos una de las proposiciones, p o q , es verdadera. Lo anterior se puede resumir en la siguiente tabla:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Definición 6 (Implicancia). Dadas dos proposiciones p y q diremos que p implica a q , lo que denotaremos como $p \Rightarrow q$, si cada vez que p es verdadera, entonces q también lo es. Lo anterior se puede resumir en la siguiente tabla:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Conjuntos

Definición 7 (Conjunto). Por **conjunto** entenderemos a una colección de objetos, previamente definidos y diferenciables entre sí, a los que llamaremos **elementos**.

Definición 8 (Igualdad de Conjuntos). Dados dos conjuntos A y B diremos que son iguales si contienen los mismos elementos. Es decir:

$$A = B \Leftrightarrow ((\forall x \in A) x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge ((\forall x \in B) x \in B \Rightarrow x \in A).$$

Definición 9 (Conjunto Vacío). El conjunto vacío, que denotamos $\emptyset$, corresponde al conjunto que no contiene ningún elemento.

Definición 10 (Inclusión). Dados dos conjuntos A y B , diremos que A está incluido en B , lo que denotamos por $A \subset B$ todos los elementos de A , están también en B . Es decir:

$$A \subset B \Leftrightarrow ((\forall x \in A) x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Proposición 11. Sean A, B, C conjuntos. Entonces:

1. $(A = B \wedge B = C) \Rightarrow A = C$.
2. $A \subset A$.
3. $\emptyset \subset A$.
4. $(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C$.
5. $(A \subset B \wedge B \subset A) \Rightarrow A = B$.

Definición 12 (Las partes de un conjunto). Dados un conjuntos A , llamaremos **conjunto de las partes de A** , o simplemente las partes de A , al conjunto que reúne a todos los subconjuntos de A . Se puede denotar por $\mathcal{P}_A$ o por 2^A .

Definición 13 (Unión). Dados dos conjuntos A y B , la unión de ellos, denotada como $A \cup B$, consiste en el conjunto que contiene todos los elementos que están al menos en uno de los dos conjuntos. Es decir:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Definición 14 (Intersección). Dados dos conjuntos A y B , la intersección de ellos, denotada como $A \cap B$, consiste en el conjunto que contiene todos los elementos que están simultáneamente en ambos conjuntos. Es decir:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Proposición 15. Sean A, B, C conjuntos. Entonces:

1. $A \cap B = B \cap A$.
 $A \cup B = B \cup A$.
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
4. $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.

Definición 16 (Diferencia). Dados dos conjuntos A y B , la diferencia de A menos B , denotada como $A \setminus B$, consiste en el conjunto que contiene todos los elementos que están en A , pero no están en B . Es decir:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Definición 17 (Complemento). Dado un conjunto universo U y un conjunto $A \subset U$, el complemento de A , denotado como A^c , consiste en el conjunto que contiene todos los elementos que están en U , pero no están en A . Es decir:

$$A^c = U \setminus A.$$

En el caso de que el conjunto universo se infiere del contexto, se suele escribir $A^c = \{x \notin A\}$.

Proposición 18. Sean A, B conjuntos. Entonces:

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
2. $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$.
3. $(A^c)^c = A$
4. $A \cup A^c = U$.
 $A \cap A^c = \emptyset$.

Definición 19 (Diferencia Simétrica). Dados dos conjuntos A y B , la diferencia simétrica entre A y B , denotada como $A \Delta B$, consiste en el conjunto que contiene todos los elementos que: están en A , pero no están en B , o bien, están en B , pero no están en A . Es decir:

$$A \Delta B = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}.$$

Definición 20 (Producto Cruz). Dados dos conjuntos A y B , el producto cruz entre ellos, denotado como $A \times B$, consiste en el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) que se pueden construir considerando $a \in A$ y $b \in B$. Es decir

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Funciones

Definición 21 (Función). Sean A, B conjuntos, una función $f : A \rightarrow B$, corresponde a un subconjunto de $A \times B$ que satisface:

$$(\forall a \in A) (\exists b \in B) (a, b) \in f.$$

$$((a, b) \in f \wedge (a, c) \in f) \Rightarrow b = c.$$

En palabras, a cada elemento de A , f asocia a lo más un elemento de B .

Definición 22 (Composición de funciones). Sean A, B, C conjuntos, una función $f : A \rightarrow B$ y una función $g : B \rightarrow C$. Se define la **composición** de f y g , denotada por $g \circ f$, como

$$\begin{aligned} g \circ f & : A \rightarrow C \\ (g \circ f)(a) & = g(f(a)). \end{aligned}$$

Definición 23 (Función Inyectiva). Sean A, B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Se dice que f es **inyectiva**, si

$$(\forall a, a' \in A) f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'.$$

En palabras, a elementos distintos de A , f asocia elementos distintos de B .

Definición 24 (Función Sobreyectiva). Sean A, B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Se dice que f es **sobreyectiva**, si

$$(\forall b \in B) (\exists a \in A) f(a) = b.$$

En palabras, cada elemento de B está asociado al menos a un elemento de A .

Definición 25 (Función Biyectiva). Sean A, B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Se dice que f es **biyectiva**, si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Definición 26 (Función Inversa). Sean A, B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Si f es biyectiva, se define la función inversa de f , denotada por f^{-1} , por:

$$\begin{aligned} f^{-1} & : B \rightarrow A \\ f^{-1}(b) = a & \Leftrightarrow f(a) = b. \end{aligned}$$

Proposición 27. Sean A, B y C conjuntos y $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ funciones. Entonces:

1. Si f y g son inyectivas, entonces $(g \circ f)$ es inyectiva.
2. Si f y g son sobreyectivas, entonces $(g \circ f)$ es sobreyectiva.
3. Si f y g son biyectivas, entonces $(g \circ f)$ es biyectiva.
4. Si $(g \circ f)$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.
5. Si $(g \circ f)$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

Definición 28 (Imagen de un conjunto). Sean A, B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Si $A' \subset A$, se define la **imagen** de A' a través de f por

$$f(A') := \{f(a) : a \in A'\}.$$

Notese que

$$b \in f(A') \Leftrightarrow (\exists a \in A') f(a) = b.$$

Definición 29 (Preimagen de un conjunto). Sean A, B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Si $B' \subset B$, se define la **preimagen** de B' a través de f por

$$f^{-1}(B') := \{a \in A : f(a) \in B'\}.$$

Notese que

$$a \in f^{-1}(B') \Leftrightarrow f(a) \in B'.$$

Proposición 30. Sean A, B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Entonces:

1. Si A_1, A_2 son subconjuntos de A y $A_1 \subset A_2$, entonces:

$$f(A_1) \subset f(A_2).$$

2. Si $A_1, \dots, A_n$ son subconjuntos de A , entonces:

$$f\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \bigcup_{i=1}^n f(A_i).$$

$$f\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \subset \bigcap_{i=1}^n f(A_i).$$

Proposición 31. Sean A, B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Entonces:

1. Si B_1, B_2 son subconjuntos de B y $B_1 \subset B_2$, entonces:

$$f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2).$$

2. Si $B_1, \dots, B_n$ son subconjuntos de B , entonces:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(B_i).$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n B_i\right) = \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(B_i).$$

Cardinal de un conjunto

Definición 32 (Cardinal de un conjunto). Dados dos conjuntos A y B , diremos que:

1. El cardinal A y B son iguales, lo que denotaremos como $|A| = |B|$, si existe una función biyectiva $f : A \rightarrow B$.
2. El cardinal de A es menor o igual que el cardinal de B , lo que denotaremos como $|A| \leq |B|$, si existe una función inyectiva $f : A \rightarrow B$.
3. El cardinal de A es menor estricto que el cardinal de B , lo que denotaremos como $|A| < |B|$, si $|A| \leq |B|$ pero $|A| \neq |B|$.

Definición 33 (Conjunto Finito). Diremos que un conjunto A es finito si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $|A| = |\{1, 2, \dots, n\}|$.

Proposición 34 (Propiedades del Cardinal de un Conjunto). Sean A, B, C conjuntos. Entonces:

1. $|A| \leq |A|$.
2. Si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |C|$, entonces $|A| \leq |C|$.
3. Si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$, entonces $|A| = |B|$. (Teorema de Bernstein - Cantor - Schröder)
4. Si $A \subset B$, entonces $|A| \leq |B|$.
5. $|A| < |2^A|$ (Teorema de Cantor).

Definición 35 (Conjunto Numerable). Diremos que un conjunto es numerable si tiene el mismo cardinal que $\mathbb{N}$.

Proposición 36. $\mathbb{Z}$ es numerable.

Proposición 37. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

Corolario 38. $\mathbb{Q}$ es numerable.

Corolario 39. Para todo $n \in \mathbb{N}$, si $A_1, \dots, A_n$ son conjuntos numerables, entonces $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ es numerable.

Proposición 40. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n es un conjunto numerable, entonces

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

es numerable.

Proposición 41. $2^{\mathbb{N}}$ es no numerable.

Proposición 42. $[0, 1]$ es no numerable.

Corolario 43. $\mathbb{R}$ es no numerable.

Interview (fragmento)
Mario Benedetti

“No es ninguna molestia
explicarle qué pienso
del infinito
el infinito es
sencillamente
un agrio viento frío
que eriza las mucosas
la piel
y las metáforas
le pone a uno en los ojos
lágrimas de rutina
y en la garganta un nudo
de sortilegio
seguramente usted ya se dio cuenta
en el fondo no creo
que exista el infinito.”

Junio 2026